INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

ÉTABLISSEMENT LIBRE D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR RECONNU PAR L'ÉTAT
(Décret du 1-9-1971, *J.O.* du 10-9-1971)

DIPLÔME VISÉ PAR LE MINISTÈRE DES UNIVERSITÉS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1981

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 5

NOTATIONS

E étant un ensemble fini de cardinal n, on désigne par :

— $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E

— $|A|$ le cardinal de A

— $A - B$ l'ensemble $\{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

— $\mathcal{H}_1$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$

— [A] l'élément de $\mathcal{H}_1$ défini par : $[A](X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X = A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

— $\mathcal{H}_2$ l'ensemble des applications ε de $(\mathfrak{P}(E))^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \varepsilon(X, Y) \neq 0 & \text{si } X = Y \\ \varepsilon(X, Y) = 0 & \text{si } X \not\subset Y \end{cases}$$

— $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_1)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{H}_1$

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Montrer que la famille des [A], où A décrit $\mathfrak{P}(E)$, est une base de $\mathcal{H}_1$. $\mathcal{H}_1$ est donc un espace vectoriel de dimension...

Soit $\mathcal{B}$ cette base, et h un élément quelconque de $\mathcal{H}_1$; la décomposition de h dans la base $\mathcal{B}$ vous sera utile pour la suite.

Tournez la page S. V. P.

I

Pour tout réel u, on définit l'application

$$\varphi_u : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

$$h \longmapsto \varphi_u(h) = h_u \quad \text{par la relation :}$$

(1)
$$\left[\forall\, A \in \mathfrak{P}(E), \qquad h_u(A) = \sum_{X \subset A} u^{|A-X|} h(X) \right]$$

1° Montrer que $\varphi_u \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1)$

Le but de la partie I est de prouver que

$$(1) \quad \Leftrightarrow \left[\forall\, A \in \mathfrak{P}(E), \qquad h(A) = \sum_{X \subset A} (-u)^{|A-X|} h_u(X) \right]$$

On va commencer par le faire dans le cas simple où E n'a que deux éléments a et b (questions 2, 3, 4 et 5).

2° Expliciter la matrice M_u de φ_u relativement à la base ordonnée $([\varnothing], [\{a\}], [\{b\}], [E])$ de $\mathcal{H}_1$ et en déduire que M est inversible.

3° v étant aussi un réel quelconque, calculer $M_u \times M_v$.

4° En déduire que l'ensemble des φ_u ($u \in \mathbb{R}$), muni de la loi $\circ$, est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
Préciser l'élément neutre et l'inverse de φ_u.

5° En déduire l'équivalence cherchée.

On va maintenant démontrer le cas général par un raisonnement direct, sans recourir au calcul matriciel.

6° A et B étant deux parties de E telles que $A \subset B$, et de cardinaux respectifs p et q; u et v étant deux réels quelconques, établir les égalités suivantes :

a.
$$\sum_{X \subset E} u^{|X|} = (u+1)^n$$

b.
$$\sum_{A \subset X \subset B} u^{|X-A|} v^{|B-X|} = (u+v)^{q-p}$$

7° Démontrer que $\varphi_u \circ \varphi_v = \varphi_{u+v}$

8° Conclure.

II

Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{H}_2$, on définit l'application

$$\varphi_\varepsilon : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

$$h \longmapsto \varphi_\varepsilon(h) = h_\varepsilon \quad \text{par la relation :}$$

(2)
$$\Leftrightarrow \left[\forall\, A \in \mathfrak{P}(E), \qquad h_\varepsilon(A) = \sum_{X \subset A} \varepsilon(X, A)\, h(X) \right]$$

On se propose de démontrer que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{H}_2$, il existe dans $\mathcal{H}_2$ un élément ε' unique, associé à ε, tel que

$$(2) \qquad \Leftrightarrow \left[\forall\ A \in \mathfrak{P}(E), \qquad h(A) = \sum_{X \subset A} \varepsilon'(X, A)\, h_\varepsilon(X) \right]$$

1° Il est clair que $\varphi_\varepsilon \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1)$. Soit M_ε sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$. On notera $\alpha_{X,Y}$ le coefficient de M_ε situé à l'intersection de la ligne de $[X]$ et de la colonne de $\varphi_\varepsilon([Y])$.

Montrer que $\alpha_{X,Y} = \varepsilon(Y, X)$.

2° Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{P}(E)$, et σ un élément quelconque de $\mathfrak{S}$.

a. Montrer que

$$\sigma(\varnothing) \neq \varnothing \Rightarrow \prod_{X \in \mathfrak{P}(E)} \alpha_{X,\sigma(X)} = 0$$

b. Soit A une partie de E à 1 élément. Montrer que

$$\sigma(A) \neq A \Rightarrow \prod_{X \in \mathfrak{P}(E)} \alpha_{X,\sigma(X)} = 0$$

c. Calculer le déterminant de M_ε et en déduire que M_ε est inversible.

3° En vous inspirant du (I. 2°), donner une méthode plus rapide pour montrer que M_ε est inversible.

4° Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices carrées $\left(\left(\lambda_{X,Y}\right)\right)$ de dimension 2^n, dont les coefficients sont indexés par les couples de $(\mathfrak{P}(E))^2$ avec en première composante, l'indice de ligne, et telles que

$$\begin{cases} \lambda_{X,Y} \neq 0 & \text{si} \quad X = Y \\ \lambda_{X,Y} = 0 & \text{si} \quad Y \not\subset X \end{cases}$$

Montrer rapidement que la correspondance de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathfrak{M}$, qui à ε associe M_ε est bijective.

5° On pose $M_\varepsilon^{-1} = \left(\left(\beta_{X,Y}\right)\right)$ et soit A une partie à $n - p$ éléments de E ($p \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$).

Montrer par récurrence sur p que

$$\begin{cases} \beta_{X,A} \neq 0 & \text{si} \quad X = A \\ \beta_{X,A} = 0 & \text{si} \quad A \not\subset X \end{cases}$$

6° En déduire que $M_\varepsilon^{-1} \in \mathfrak{M}$ et conclure à l'équivalence cherchée.

7° Montrer que $(\mathfrak{M}, \times)$ est un groupe.

Vous aurez sans doute remarqué que si $\varepsilon(X, Y) = \begin{cases} u^{|Y - X|} & \text{si} \quad X \subset Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on a : $\varepsilon'(X, Y) = \begin{cases} (-u)^{|Y - X|} & \text{si} \quad X \subset Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Tournez la page S. V. P.

III

A tout élément ε de $\mathcal{H}_2$, on associe l'application $\bar{\varepsilon}$ de $(\mathfrak{P}(E))^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\bar{\varepsilon}\,(X, Y) = \varepsilon\,(Y, X)$$

Soit alors l'application linéaire

$$\varphi_{\bar{\varepsilon}} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

$$h \longmapsto \varphi_{\bar{\varepsilon}}(h) = h_{\bar{\varepsilon}} \quad \text{définie par :}$$

(3) $$\left[\forall\, A \in \mathfrak{P}(E), \qquad h_{\bar{\varepsilon}}(A) = \sum_{X \supset A} \bar{\varepsilon}(X, A)\, h(X)\right]$$

1° Comparer $M_{\bar{\varepsilon}}$ et M_{ε}.

2° Montrer que l'ensemble $\overline{\mathfrak{M}}$ des $M_{\bar{\varepsilon}}$, muni de la multiplication, est un groupe isomorphe à $(\mathfrak{M}, \times)$.

3° En déduire que

$$(3) \quad \Leftrightarrow \left[\forall\, A \in \mathfrak{P}(E), \qquad h(A) = \sum_{X \supset A} \overline{\varepsilon'}(X, A)\, h_{\bar{\varepsilon}}(X)\right]$$

IV

Soit $\{\Omega_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de n ensembles finis, $(n \neq 0)$, et E l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
On a alors :

$$\left|\Omega_i \bigcup \Omega_j\right| = |\Omega_i| + |\Omega_j| - \left|\Omega_i \bigcap \Omega_j\right|$$

et, d'une façon plus générale :

(4) $$\left[\forall\, A \in \mathfrak{P}(E), \qquad \left|\bigcup_{k \in A} \Omega_k\right| = \sum_{X \subset A} (-1)^{|X|+1} \left|\bigcap_{k \in X} \Omega_k\right|\right]$$

(On convient que les deux membres de l'égalité s'annulent si $A = \varnothing$).

1° Écrire l'équivalence du I. dans le cas où $u = 1$.

2° *a.* Écrire (4) sous la forme $f = h_1$, f et h étant deux éléments de $\mathcal{H}_1$ à préciser.

b. En déduire que

$$(4) \quad \Leftrightarrow \left[\forall\, A \in \mathfrak{P}(E), \qquad \left|\bigcap_{k \in A} \Omega_k\right| = \sum_{X \subset A} (-1)^{|X|+1} \left|\bigcup_{k \in X} \Omega_k\right|\right]$$

V

Soit E un ensemble de n personnes ($n \geqslant 2$).

Chacune d'entre elles envoie une lettre (et une seule) à l'une quelconque des $n - 1$ autres personnes qu'elle choisit au hasard. Les différents choix possibles sont supposés équiprobables.

1° De combien de manières différentes les lettres peuvent-elles être adressées?

2° Soit $p_{j,n}$ la probabilité pour qu'une personne de E, désignée d'avance, reçoive exactement j lettres.

a. Calculer $p_{j,n}$

b. Montrer que $p_{j,n} \sim \frac{1}{j!}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-1}$ quand $n \to \infty$

c. En déduire la limite p_j de $p_{j,n}$ quand $n \to \infty$

d. Quelles sont l'espérance mathématique et la variance de la loi associée aux p_j?

3° Si $j > \frac{n}{2}$ quelle est la probabilité pour qu'au moins une personne de E reçoive exactement j lettres ?

Pourquoi le même raisonnement n'est-il pas applicable si $j \leqslant \frac{n}{2}$?

4° Pour tout $A \in \mathfrak{P}(E)$ on désigne par $f(A)$ la probabilité pour qu'aucune personne de A ne reçoive de lettre. Calculer $f(A)$.

5° Soit $g(A)$ la probabilité pour que l'ensemble des personnes qui ne reçoivent pas de lettre soit exactement A.

a. Montrer que, et indiquer de quelle manière, $f(A)$ s'exprime en fonction de certains $g(X)$.

b. Écrire l'équivalence du III dans le cas particulier où $\varepsilon(X, Y) = 1$ si $X \subset Y$ et 0 sinon.

c. En déduire $g(A)$.

6° Quelle est la probabilité q pour que chaque personne de E reçoive une lettre?

Nota : Les questions 1°, 2°, 3° et 4° du V sont indépendantes de tout ce qui les précède.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail